Ασκησεις σελ. 58.

Σελ. 58/

(2) S_n , $m < n$

$p = (1, 2, \ldots, m)$

$o(p) = n$ άρα $o(\langle p \rangle) = m$

Σελ. 78/

(3) $Y \leq O$ $H \triangleleft O$ τότε $Y \cap H \triangleleft Y$

$H \triangleleft O \Rightarrow a \in H \;\&\; \beta \in O \Rightarrow \beta a \beta^{-1} \in H$

$Y \cap H \subseteq Y$.

1) $a \in Y \cap H \Rightarrow a \in Y \;\&\; a \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{-1} \in Y \;\&\; a^{-1} \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^{-1} \in Y \cap H$

2) $\left.\begin{array}{l} \alpha, b \in Y \cap H \\ a * \beta \in Y \cap H \end{array}\right\}$ κλειστή

Άρα $Y \cap H \leq Y$

$\gamma \in Y \;\&\; \gamma \notin H \Rightarrow \gamma \notin Y \cap H$

$\forall \delta \in H \Rightarrow \gamma * \delta * \gamma^{-1} \in H$

άρα, $\delta \in H \cap Y \Rightarrow \gamma \delta \gamma^{-1} \in Y$ $\Big| \Rightarrow \gamma \delta \gamma^{-1} \in Y \cap H \Rightarrow$

$\Rightarrow Y \cap H \triangleleft Y$

Σελ. 78

(4) $Y \leq O$ και $H \lhd O \Rightarrow H\cdot Y \leq O$

Αφού $Y \leq O$ $\left.\begin{array}{l} e \in Y \neq \emptyset \\ e \in H \neq \emptyset \end{array}\right\} e \in HY \neq \emptyset$

όπου

$H\cdot Y = \{ b\cdot y \mid b \in H$ και $y \in Y \}$ Έστω τυχόν στοιχείο

$x \in HY \Rightarrow (\exists a \in H)(\exists b \in Y) : x = a\cdot b \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1} \Rightarrow x^{-1} b = b^{-1} a b \xrightarrow[a \in H]{H \lhd O} b^{-1} a b \in H$

$\Rightarrow (x^{-1} b) b^{-1} \in e HY$

Πρέπει το γινόμενο κλειστή πράξη

Έστω $x, y \in H \Rightarrow (\exists a, \gamma \in H)(\exists b, \delta \in Y) : x = ab, y = \gamma\delta$

$xy = ab\gamma\delta = ab\delta \cdot \underbrace{\delta^{-1}\gamma\delta}_{\varepsilon \in H} \xrightarrow[\gamma \in H]{H \lhd O} a\underbrace{b\delta}_{\zeta \in Y}\varepsilon = a\zeta\varepsilon \Rightarrow xy\zeta^{-1} = a\zeta\varepsilon\zeta^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow xy\zeta^{-1} = \underbrace{a\zeta\varepsilon\zeta^{-1}}_{\in H} \Rightarrow (xy\zeta^{-1})\zeta \in HY$

Σελ. 78

(10): $Y \lhd O$, $H \lhd O$, $Y \cap H = \{1\}$

ΝΔΟ

$ab = ba$ $\forall a \in Y, \forall b \in H$

$(aba^{-1})b^{-1} \in H$ ①

$H \lhd O \Rightarrow aHa^{-1} = H$ $\forall a \in O$

$(aHa^{-1})b^{-1} = Hb^{-1} = H$

αλλά $a(ba^{-1}b^{-1}) = Y$ ②

$Y \lhd O \Rightarrow bYb^{-1} = Y \Rightarrow a(bYb^{-1}) = aY = Y$

Από ① & ② : $aba^{-1}b^{-1} \in Y \cap H$

$aba^{-1}b^{-1} = 1$

7) σελ 58.

(A) $a=(1,2)$

$\beta=(1,2,\dots,\nu-1,\nu)$

$\beta^1=\begin{pmatrix}1&2&\dots&\nu-1&\nu\\2&3&\dots&\nu&1\end{pmatrix}$

$\beta^k=\begin{pmatrix}1&2&\dots&\nu-k&\nu-k+1&\nu-1&\nu\\k+1&k+2&&\nu&1&k-1&k\end{pmatrix}$

$\beta^k\alpha=(k+1,k+2)\,\beta^k$

$\beta^k\alpha=\beta^k(1,2)=\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&\nu-1&\nu\\k+2&k+1&3&&k-1&k\end{pmatrix}$

$(k+1,k+2)\,\beta^k=\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&\nu\\ &k+2&k+3&&\\k+2&k+1&k+3&\dots&k\\ &&&&k\end{pmatrix}$

(B) $(i,j)=(j,j-1)(j-1,j-2)\dots(i+3,i+2)(i+2,i+1)(i,i+1)\dots(j-2,j-1)(j-1,j)$

$i<j-1$

$x\in\{1,2,\dots,\nu\}$

Για $x<i \Rightarrow f(x)=x=g(x)$, το λ δεν εμφανίζεται στη g

Για $x>j \Rightarrow f(x)=x=g(x)$ " " "

Για $x=i \Rightarrow f(i)=j=g(i)$

$g(i)=i\to i+1\to i+2\to\dots\to j-1\to j$

$g(j)=j\to j-1\to j-2\dots\to x=j \Rightarrow f(x)=i=g(x)$

$i<x<j \Rightarrow f(x)=x=g(x)$

Έστω $x=j-t$ όπου $j-t\to j-t+1\to\dots\to j-t$

Άρα, η συμμετρική ομάδα γεννάται από τα α, β και μόνο από αυτά

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $|O|<\infty$ και p πρώτος με $p \mid |O| \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists y \in O) : |y| = p$.

ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

Γνωρίζαμε ομομορφισμούς μεταξύ διανυσματικών χώρων
$T: V \to W$ γραμμική απεικόνιση (δηλ $T(u+v)=T(u)+T(v)$
και $T(c\cdot u) = c\cdot T(u)$ $c \in$ Σώμα).
Κρατάμε ότι $T(u+v) = T(u)+T(v)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας ομομορφισμός f μεταξύ ομάδων O & Y είναι μία απεικόνιση $f: O \to Y$ με ιδιότητα
$f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b)$

Πχ1) $f: O \to Y$ $f(a) = 1_Y$ μοναδιαίο μηδέν
Πχ2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $f(x) = e^x$ είναι 1-1 και επί
με ιδιότητα $f(x+y) = f(x)\cdot f(y) = e^x \cdot e^y$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Έστω $\varphi: O \to Y$ και $\psi: Y \to T$ ομομορφισμοί
1) $\psi\varphi$ ομομορφισμός ομάδων
2) Αν ψ και φ 1-1 $\Rightarrow \psi\varphi$ είναι 1-1
3) Αν ψ και φ επί $\Rightarrow \psi\varphi$ είναι επί
4) Αν φ 1-1 & επί $\Rightarrow$ η αντίστροφη $\varphi^{-1}: Y \to O$ είναι ομομορφισμός ομάδων

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο $\varphi: O \to Y$ ισομορφισμός αν είναι ομομορφισμός 1-1, επί $\varphi: O \xrightarrow{\cong} Y$ (αλγεβρικά οι ομάδες O και Y ταυτίζονται).
Αν $\varphi: O \to O$ ισομορφισμός θα καλείται αυτομορφισμός
Το σύνολο των αυτομορφισμών στην O συμβολίζεται $Aut(O)$

$$\left.\begin{array}{l} f,g \in Aut(O) \\ f,g : O \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} O \end{array}\right\} \Rightarrow fg \ \& \ gf \in Aut(O)$$

Το σύνολο $Aut(O)$ με αυτή την πράξη της σύνθεσης γίνεται ομάδα.

Αναζήτηση του $Aut(O) = ;;$

πχ

Έστω $O = \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p$

$Aut(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_{p-1} \Rightarrow |Aut(\mathbb{Z}_p)| = p-1$

$\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$

$[a] \to [a]$

$[a] \to [a+1]$

$\varphi : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p$

(γεννήτορ) $\mapsto$ (γεννήτορ)

$\mapsto$ $p-1$ επιλογές (όσοι και οι γεννήτορες)

Για τους ομομορφισμούς

$\varphi : \mathbb{Z}_p \to O$ ομομορφισμός

πχ το $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}$ μοναδικός

$[1] \mapsto n$

$[1]+[1]+[1] \to n+n+n$

$0 \longrightarrow 3n \Rightarrow n=0$ διότι $\varphi(0)=0$

Αντίθετα,

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ τότε $1 \mapsto [\bar{0}]$ τετριμμένη περίπτωση

$1 \mapsto [\bar{1}]$

$1 \mapsto [\bar{2}]$

①: $\varphi(1) = [1]$, $\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) = [1] + [1] = [2]$

Επίσης $\varphi(3) = [3] = [0]$, $\varphi(4) = \varphi(3) + \varphi(1) = [1]$

$\varphi(3\mathbb{Z}) = \{[0]\}$, $\varphi(4\mathbb{Z}+1) = \{[1]\}$, $\varphi(3\mathbb{Z}+2) = \{[2]\}$

$\varphi: \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_4$

επιλογές

$[1] \longrightarrow [1]_4 \Rightarrow \varphi[2]_3 = [2]\ ,\ \varphi[0]_3 = [3]_4 \neq [0]_4$

$[1] \longrightarrow [2]_4$

$[1] \longrightarrow [3]_4$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\varphi: O \to Y$ ομομορφισμός ομάδων,

1) Τότε $\varphi(1_0) = 1_Y$ και $\varphi^{-1}(1_Y) = \ker\varphi$

2) $O(\varphi(a)) \,/\, O(a)$

άρα στο παραπάνω πχ

$O[1]_3 = 3\ ,\ O((\varphi[1]_3)) / 3$ και $\varphi \xrightarrow[O(\varphi(1]_3)=1]{(3,4)=1} \varphi([1]_3) = [0]_4$

Απόδειξη

2) ~~Έστω $\varphi(\alpha) = x \in Y$~~

Έστω $O(\alpha) = k \Rightarrow \alpha^k = 1_0 \Rightarrow \varphi(\alpha^k) = \varphi(1_0) \Rightarrow (\varphi(\alpha))^k = 1_Y$

Τότε $O(\varphi(\alpha)) / k = O(\alpha)$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Έστω $\varphi: O \to Y$ ομομορφισμός και $\ker\varphi = \varphi^{-1}\{1_Y\} = \{a / \varphi(a) = 1_Y\}$. Τότε $\ker\varphi \triangleleft O$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $b \in O$ και $a \in \ker\varphi$ και ΘΔΟ

$bab^{-1} \in \ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(bab^{-1}) = 1_Y$

αλλά φ ομομορφ. και άρα

$\varphi(b)\cdot\varphi(\alpha)\varphi(b)^{-1} = 1_Y \Leftrightarrow \varphi(b)\cdot\varphi(b)^{-1} = 1_Y$ ισχύει

πχ

$\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_k$ έχει πυρήνα $n \mapsto \varphi(n) = n \bmod k$

$\ker\varphi = k\mathbb{Z}$

2) $(\mathbb{R},+) \simeq (\mathbb{R}^+,\cdot)$ $\quad x \mapsto e^x$

3) $(\mathbb{Q},+) \simeq (\mathbb{Q}^+,\cdot)$; αν έτσι, τότε θα είχαμε $a \in \mathbb{Q}$, $\varphi(a)=3 \Rightarrow \varphi\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)=3 \Rightarrow \varphi\left(\frac{a}{2}\right)^2=3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{3}$ άτοπο

4) $GL(2,\mathbb{R}) \not\simeq \mathbb{R}^*$ διότι η μια αβελιανή και η άλλη όχι

5) $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ ομάδα και $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ ομάδα
Ο $\mathbb{R}^*$ δεν είναι συνεκτικός χώρος ενώ $\mathbb{C}^*$ συνεκτικός
$(\mathbb{C}^*,\cdot) \not\simeq (\mathbb{R}^*,\cdot)$

$S^1=\{x+iy \mid x^2+y^2=1\} \leq \mathbb{C}^*$ υποομάδα
όταν πολ/ζουμε z και z' με
$|z|=|z'|=1 \Rightarrow |z\cdot z'|=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow zz' \in S^1$ και $|z|=1 \Rightarrow |z^{-1}|=1 \Rightarrow z^{-1} \in S^1$

Ερώτημα: Σε ποιές S^n ορίζεται το γινόμενο;

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\varphi: O \to Y$ ομομορφισμός ομάδων

1) Αν $T \leq O \Rightarrow \varphi(T) \leq Y$
2) Αν $\Sigma \leq Y \Rightarrow \varphi^{-1}(\Sigma) \leq O$
$\varphi^{-1}(\Sigma)=\{a \mid a \in O$ και $\varphi(a) \in \Sigma\}$
3) Αν $\Sigma \trianglelefteq Y$, τότε $\varphi^{-1}(\Sigma) \trianglelefteq O$
4) Υποθέτουμε ότι η φ επιμορφισμός.
Αν $T \trianglelefteq O$ τότε $\varphi(T) \trianglelefteq Y$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Cayley)
Κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι ισόμορφη με κάποια υποομάδα κάποιας συμμετρικής ομάδας
ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Έστω Σ_n που αποτελείται από όλες τις 1-1 απεικονίσεις στο σύνολο O.

Όλες οι μεταθέσεις των στοιχείων της O

$\varphi : O \to \Sigma_n$ που είναι ομομορφισμός και 1-1

Τότε $\varphi(O) \leq \Sigma_n$.

Θέλουμε $\forall a \in O$ το $\varphi(a)$ είναι μετάθεση της O

Τότε το $\varphi(a) \in \Sigma_n$

Το $\varphi(a)$ πρέπει να απεικονίζει τα στοιχεία της O

στην O. Έστω $b \in O$ τυχαίο, πρέπει

$\varphi(a) \cdot b \in O$

ορίζουμε $\varphi(a) \cdot b = ab \in O$

$$O = \{a_1, a_2, \ldots b, \ldots a_n\}$$
$$\downarrow \varphi(a) \qquad\qquad \downarrow$$
$$O = \{a_1, a_2, \ldots, ab, \ldots, a_n\}$$

$\varphi(a) \cdot b = ab$

Η φ είναι ομομορφισμός και 1-1

Άρα $\varphi(O) \leq \Sigma_n$ και $\varphi(O) \cong O$